

# $\alpha+\beta$ 联合功效框架下的多阶段决策全局最优化

谢蕊阳

(北京交通大学数学与统计学院, 北京市, 100044; 22271103@bjtu.edu.cn)

**摘要:** 在数据驱动的科学决策的背景下, 本研究聚焦电子产品生产过程常伴随复杂的质量控制和成本优化阶段问题, 以2024年全国大学生数学建模B题节选为例, 通过建立 $\alpha+\beta$ 联合功效框架, 将统计检验、动态期望、整数规划三线并进, 实现质量-成本的理论一体化。首先利用单调似然比 (MLR) 导出单样本比例的一致最大功效 (UMP) 检验; 其次将期望成本写成 Bellman 期望方程, 把拆解循环转化为稳态线性约束; 最后把 16 维 0-1 决策空间嵌入整数线性规划 (ILP), 给出闭式全局最优解。本文提出的方法在理论上整合了DP和ILP的优势, 在实际应用中提供了一种有效的多阶段生产决策优化工具, 有助于企业在保证产品质量的同时降低成本和提高效率。结合题目数据, 研究在拆解循环、供应商出品波动、售后服务、产品质量以及价格策略协同的提升路径, 为工厂选材、生产、销售提供兼具理论模型与实践温度的参考。

**关键词:**  $\alpha+\beta$ 联合功效; Bellman期望方程; 整数线性规划 (ILP); 全局最优; 灵敏度分析

## 引言

在当今快速发展的科技时代, 电子产品的生产过程变得越来越复杂, 同时也面临着诸多挑战。一方面, 消费者对产品质量的要求越来越高, 任何微小的质量问题都可能导致产品的市场竞争力下降, 甚至引发严重的声誉损失。另一方面, 企业面临着激烈的市场竞争和不断压缩的利润空间, 如何在保证产品质量的前提下, 有效降低生产成本, 成为企业生存和发展的关键。此外, 随着全球供应链的复杂化, 供应商的次品率波动、原材料价格波动等因素也给企业的生产管理带来了更大的不确定性。

因此, 科学决策的重要性日益凸显。数据驱动的决策方法可以帮助企业更好地应对复杂的生产环境, 通过建立数学模型和优化算法, 实现生产过程的全局优化。本文聚焦于电子产品生产过程中常见的质量控制和成本优化问题, 以2024年全国大学生数学建模B题节选为例, 提出了一种基于 $\alpha+\beta$ 联合功效框架的多阶段决策优化方法。该方法将统计检验、动态期望和整数规划相结合, 旨在实现质量与成本的理论一体化, 为企业提供兼具理论模型与实践温度的参考。

## 1. 问题建模

### 1.1. 抽样检测

某电子企业在采购关键零部件时, 供应商宣称批次次品率不超过 10 %。为降低质检成本并确保产线良率, 在 90 % 信度下接收合格批次, 从而在保证质量的前提下减少抽检件数, 实现成本控制与供应链风险管理的双重目标。本文提出 $\alpha+\beta$ 联合功效框架, 同时控制  $\alpha$  与  $1-\beta$ , 确保在备择假设为真时有足够能检测到真实效应, 将统计检验、动态期望、整数规划三线并进, 实现质量-成本-不确定性的理论一体化。

#### 1.1.1. 单边UMP检验

零件次品与否属于二项分布  $B(n, p)$ , 在抽样检测中无法避免第一类错误 ( $\alpha$ : 零假设为真, 拒绝零假设的概率) 与第二类错误 ( $\beta$ : 备择假设为真, 接受零假设), 如果按照传统方法仅控制第一类错误  $\alpha$ , 忽视功效  $1-\beta$  (备择假设为真, 拒绝零假设), 实际功效未知, 无法减小备择假设为真时抽样检测的真实性, 最终在高维离散决策时成本与风险失衡 [1]。

零假设  $H_0$ : 次品率  $p < p_0$

备择假设  $H_1$ : 次品率  $p \geq p_1$

实际加上参数MDD: 在备择假设  $H_1$  下, 次品率  $p_1$  与零假设下的次品率  $p_0$  之间的最小差异, 代表了企业认为“显著高于标称值”的次品率阈值。较大的 MDD 可以减少样本量, 降低检测成本, 同时确保检验具有足够的功效。  $\delta$  选择0.05。

修正假设检验:

零假设  $H_0$  : 次品率  $p = p_0$

备择假设  $H_1$  : 次品率  $p = p_1$

$p_1$  是备择假设下的次品率 (取  $p_0 = p_1 + \delta$ ,  $\delta$  是最小可检测差异)

显著性水平  $\alpha = 0.10$ 。

功效  $1 - \beta = 0.90$ 。

Neyman-Pearson引理 [1]在简单假设检验中, 给定显著性水平  $\alpha$ , 通过似然比, 见式 (1)

$$\frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} \quad (1)$$

来确定最优的拒绝区域  $R$ , 使得在给定显著性水平  $\alpha$  的情况下, 检验的功效 (即正确拒绝  $H_0$  的概率) 最大化。

二项分布  $B(n, p)$  似然函数 [2], 见式 (2) (3) :

$$L(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (2)$$

$$\Lambda(x) = \frac{\binom{n}{x} p_1^x (1-p_1)^{n-x}}{\binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^x \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-x} \quad (3)$$

### 1.1.2. 标准正态近似

大样本情况下, 二项分布  $B(n, p)$  可以用正态分布  $N(np, np(1-p))$  近似。因此, 似然比检验可以近似为, 见式 (4) :

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > Z_{1-\alpha} \quad (4)$$

其中  $\hat{p} = nx$  是样本比例,  $Z_{1-\alpha}$  是标准正态分布的  $1 - \alpha$  分位数。

### 1.1.3. 功效计算

在备择假设  $H_1$  为真的情况下, 功效  $1 - \beta$ , 见式 (5) :

$$1 - \beta = P_{H_1} \left( \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} > Z_{1-\alpha} \right) \quad (5)$$

由于  $\hat{p} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right)$ , 可以便准化为, 见式 (6) :

$$1 - \beta = P_{H_1} \left( \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} > Z_{1-\alpha} - \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right) \quad (6)$$

令  $Z_{H_1} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}$ , 则  $Z_{H_1} \sim N(0, 1)$ , 见式 (7)。因此:

$$1 - \beta = P_{H_1} \left( Z_{H_1} > Z_{1-\alpha} - \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right) \quad (7)$$

由于  $Z_{H_1} \sim N(0,1)$ ，见式 (8)：

$$1 - \beta = P_{H_1} \left( Z_{H_1} > Z_{1-\alpha} - \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right) = 1 - \Phi \left( Z_{1-\alpha} - \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right) \quad (8)$$

其中  $\Phi$  是标准正态分布的累积分布函数。

#### 1.1.4. $\alpha+\beta$ 联合样本公式

为了达到目标功效  $1 - \beta$ ，见式 (9)，则

$$Z_{1-\beta} = Z_{1-\alpha} - \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \quad (9)$$

解方程，见式 (10)

$$\frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} = Z_{1-\alpha} - Z_{1-\beta} \quad (10)$$

两边平方，见式 (11)

$$\frac{(p_1 - p_0)^2}{\frac{p_1(1-p_1)}{n}} = (Z_{1-\alpha} - Z_{1-\beta})^2 \quad (11)$$

解  $n$ ，见式 (12)

$$n = \frac{(Z_{1-\alpha} - Z_{1-\beta})^2 \cdot p_1(1-p_1)}{(p_1 - p_0)^2} \quad (12)$$

为了同时考虑  $p_0$   $p_1$  的影响，见式 (13)，取

$$n = \frac{[Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}]^2}{(p_1 - p_0)^2} \quad (13)$$

#### 1.1.5. 计算临界值 $c$

对于单边检验，使用标准正态分布的  $1 - \alpha$  分位数  $Z_{1-\alpha}$  来找到临界值， $Z_{0.90} \approx$  在给定样本量  $n$  和显著性水平  $\alpha$  下，见式 (14) (15)

$$P_{H_0}(X \geq c) = \alpha \quad (14)$$

$$c = \min \{k \in \{0, 1, \dots, n\} | P(X \geq k) \leq \alpha\} \quad (15)$$

其中 $X$ 是样本次品的数量, 服从二项分布  $B(n, p_0)$ 。

以下计算 $c$ 值:

若为大样本, 使用正态近似: 见式 (16)

$$c = \min \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \Phi \left( \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right) \leq \alpha \right\} \quad (16)$$

其中  $\Phi$  是标准正态分布的累积分布函数,  $np_0$  是样本中次品的期望数量。

python代码运行: 为样本量为278件, 属于大样本,  $c$ 值计算得到5件。

## 1.2. 存在循环的多阶段生产决策

选中的零部件在进入生产时, 需要经历检测零件、检测成品、拆解、调换四个流程。在多阶段生产中, 拆解不合格成品后, 零部件可能重新进入检测流程, 形成循环。由于不同状态下对应的检测标准不同, 关键在于如何平衡因实际决策不同, 使各阶段产生的检测成本以及调换、丢弃、重复进入前面步骤带来的潜在损失。Bellman 期望方程通过递归形式能够处理这种循环, 避免直接穷举的高计算成本, 传统的动态规划通常用于处理连续状态和决策问题, 而整数线性规划用于离散优化问题。本文创新性地将两者结合, 处理了具有离散决策变量的多阶段决策问题。

表1 企业在生产中遇到的情况

| 情况 | 零配件1 |      |      | 零配件2 |      |      | 成品  |      |      | 不合格成品 |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|-------|------|------|
|    | 次品率  | 购买单价 | 检测成本 | 次品率  | 购买单价 | 检测成本 | 次品率 | 装配成本 | 检测成本 | 市场售价  | 调换损失 | 拆解费用 |
| 1  | 10%  | 4    | 2    | 10%  | 18   | 3    | 10% | 6    | 3    | 56    | 6    | 5    |
| 2  | 20%  | 4    | 2    | 20%  | 18   | 3    | 20% | 6    | 3    | 56    | 6    | 5    |
| 3  | 10%  | 4    | 2    | 10%  | 18   | 3    | 10% | 6    | 3    | 56    | 30   | 5    |
| 4  | 20%  | 4    | 1    | 20%  | 18   | 1    | 20% | 6    | 2    | 56    | 30   | 5    |
| 5  | 10%  | 4    | 8    | 20%  | 18   | 1    | 10% | 6    | 2    | 56    | 10   | 5    |
| 6  | 5%   | 4    | 2    | 5%   | 18   | 3    | 5%  | 6    | 3    | 56    | 10   | 40   |

根据表1所示, 具体来说, 企业需要决定:

- (1) 零部件检测
- (2) 成品检测
- (3) 拆解不合格成品
- (4) 不合格产品无条件调换

### 1.2.1. 动态规划模型 [3] (DP)

通过将问题分解为多个阶段, 每个阶段的决策依赖于当前状态, 并通过状态转移方程更新下一阶段的状态, 以确保每个阶段的决策都基于当前最优状态, 从而找到全局最优解。

决策变量:

- $x_1$ : 是否检测零部件1
- $x_2$ : 是否检测零部件2
- $x_3$ : 是否检测成品
- $x_4$ : 是否拆解不合格产品
- $x_i \in \{0, 1\}$ , 1表示拆解, 0表示不拆解

状态  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$

- $s_1$ : 零部件1的检测状态 (0表示未检测, 1表示检测到次品)
- $s_2$ : 零部件2的检测状态 (0表示未检测, 1表示检测到次品)
- $s_3$ : 成品的检测状态 (0表示未检测, 1表示检测到次品)
- $s_4$ : 是否拆解不合格产品的状态 (0表示不拆解, 1表示拆解)

步骤1 记忆化DP模型

**Bellman期望成本方程：**记忆化避免重复循环计算。在当前状态下，采取某种决策后，后续状态的期望成本，从而将多阶段决策问题转化为单阶段决策问题。见式（17）

$$V(s) = \min_a [C(s, a) + \sum_{s'} P(s'|s, a) V(s')] \quad (17)$$

$V(s)$  是状态 $s$ 的期望成本。

$C(s, a)$  是在状态 $s$ 下采取决策 $a$ 的即时成本。

$P(s'|s, a)$  是从状态 $s$ 采取决策 $a$ 后转移到状态  $s'$  的概率。

**步骤2 次品率的影响**

在实际生产过程中，次品率（ $p$ ）表示产品（零部件或成品）为不合格品的概率。我们可以通过以下几种方式影响决策。

**零部件次品率：**如果未对零部件进行检测，则其次品率为供应商宣称的次品率  $p_1$ ；如果进行检测，次品率可能会变为零部件检测结果后的实际次品率。

**成品次品率：**如果未对成品进行检测，成品次品率将由零部件次品率和装配过程中的次品率决定；如果进行成品检测，则成品的次品率为检测结果所给出的次品概率。

**拆解后的次品率：**拆解不合格品的决策会将不合格的零部件重新送去检测，因此此时的次品率将依赖于拆解操作的影响。

**(2)成本计算公式**

更新后的成本函数将结合次品率、决策变量和状态变量。根据题目中的成本组成，动态规划的即时成本  $C(s, a)$  可以写成以下形式：见式（18）

$$C(s, a) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \quad (18)$$

**步骤3 零件成本**

零件成本是购买零部件的成本，与决策变量  $x_1, x_2$  相关，且次品率  $p_1, p_2$  影响未检测时的成本：见式（19）

$$C_1 = p_1 (1 - x_1) \bullet c_1 + p_2 (1 - x_2) \bullet c_2 \quad (19)$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  分别是零部件1和零部件2的采购成本， $p_1$  和  $p_2$  是次品率  
装配成本：见式（20）

$$C_2 = a_1 s_1 + a_2 s_2 \quad (20)$$

其中  $a_1$  和  $a_2$  分别是零部件1和零部件2的装配成本。

检测成本：见式（21）

$$C_3 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \quad (21)$$

其中  $d_1, d_2, d_3$  分别是零部件1，零部件2，成品的检测成本。

拆解成本：见式（22）

拆解成本收受  $x_4$  影响：

$$C_4 = b_1 x_4 \quad (22)$$

$b_1$  是拆解不合格品成本

调换成本:

未进行成品检测, 且次品进入市场, 见式 (23) 则

$$C = q_1 s_3 \quad (23)$$

$q_1$  是调换次品的成本。

此流程对应Bellman方程如下, 见式 (24)

$$V(s) = \min_a [C + C + C + C + C + \sum_{s'} P(s'|s, a) V(s')] \quad (24)$$

步骤4 动态规划表的填充过程

通过贝尔曼方程, 我们依次计算每个状态 $s$ 的最优决策。动态规划表的填充过程是递归的, 假设初始状态 $dp[0][0][0][0]=0$  (没有任何成本), 然后根据决策和转移概率递归计算每个状态的期望成本。

初始化: 将初始状态的期望成本设置为0, 其余状态初始化为无穷大。

递归计算: 根据贝尔曼方程递归填充表格, 在每个阶段计算最优决策, 并更新动态规划表中的期望成本。

表2 最优策略求解表

| 情况 | 零配件1 (检测) | 零配件2 (检测) | 成品 (检测) | 拆解 (是否) | 成本   |
|----|-----------|-----------|---------|---------|------|
| 1  | 是         | 否         | 否       | 否       | 40.0 |
| 2  | 是         | 否         | 否       | 是       | 46.9 |
| 3  | 否         | 否         | 是       | 是       | 47.1 |
| 4  | 否         | 否         | 是       | 是       | 42.4 |
| 5  | 否         | 是         | 是       | 否       | 40.3 |
| 6  | 是         | 否         | 否       | 否       | 35.5 |

根据表2所示, Python运行 [4]得: 在一道组装工序, 两种零部件配置的生产过程中, 最优生产决策应该是检测零件1, 不检测零件2, 不检测成品, 流入市场后次品与否都不给予拆解, 此时每个产品的最小成本为35.5元。

### 1.3. 高维生产流程组合优化

企业面临 8 种零部件、3 种半成品和 1 种成品的检测与拆解决策, 涉及 16 个二元决策变量。每个阶段的决策都会影响总成本, 包括检测成本、装配成本、拆解成本、调换成本等。此外, 不合格成品的拆解可能会导致零部件重新进入检测流程, 形成循环。问题的核心是如何在高维决策空间中找到最优决策组合 [5], 以最小化总成本。

#### 1.3.1. 整数规划 (ILP)

步骤1 决策变量

$x_i \in \{0,1\}$ : 是否检测第 $i$ 个零部件 ( $i=1,2,\dots,8$ )。

$y_j \in \{0,1\}$ : 是否检测第 $j$ 个半成品 ( $j=1,2,3$ )。

$z \in \{0,1\}$ : 是否检测成品。

$u_k \in \{0,1\}$ : 是否拆解第 $k$ 个不合格产品 ( $k=1,2,3,4$ )。

步骤2 新成本组成

购买成本:  $c_{\text{part}}$

检测成本:  $c_{\text{inspect}}$

拆解成本:  $c_{\text{disassembly}}$

调换成本:  $c_{\text{replace}}$

市场售价:  $r$

拆解费用:  $c_{\text{disposal}}$

步骤3 目标函数

见式 (25)

$$\min \sum_{i=1}^8 c_{\text{part}} x_i + \sum_{j=1}^3 c_{\text{inspect}} y_j + c_{\text{inspect}} z + \sum_{k=1}^4 c_{\text{disassembly}} u_k + \sum_{k=1}^4 c_{\text{replace}} (1 - z) u_k + \sum_{k=1}^4 c_{\text{disposal}} u_k \quad (25)$$

步骤4 约束条件

步骤4.1 逻辑约束: 若检测某半成品, 则至少检测其一个组成零部件。见式 (26)

$$y_j \leq \sum_{i \in S_j} x_i, \quad j = 1, 2, 3 \quad (26)$$

步骤4.2 拆解逻辑: 若拆解, 则必须检测。见式 (27) (28)

$$u_k \leq y_j \quad k = 1, 2, 3 \quad (27)$$

$$u_4 \leq z \quad (28)$$

步骤4.3 McCormick 包络

期望次品率约束: McCormick包络将乘积线性化

此流程的关键问题是: 次品率 $p$ 与后续状态的期望成本 $E$ 的乘积  $p \bullet E$  是非线性的。这种非线性关系在整数线性规划 (ILP) 中是难以直接处理的, 因为 ILP 要求所有约束和目标函数都是线性的。

McCormick包络 将非线性约束线性化

引入辅助变量  $\omega$  表示  $p \bullet E$

确保  $\omega$  的值在合理的范围内, 引入以下线性约束: 见式 (29) (30) (31) (32)

$$\omega \geq p \bullet E_{\text{low}} \quad (29)$$

$$\omega \leq p \bullet E_{\text{up}} \quad (30)$$

$$\omega \leq p \bullet E + M(1 - u_k) \quad (31)$$

$$\omega \geq p \bullet E - M u_k \quad (32)$$

其中 $M$ 是一个大常数,  $E_{\text{low}}$  和  $E_{\text{up}}$  是期望成本的下界和上界。

### 1.3.2. 灵敏度分析 [6]

Sobol指数  $S_i$  第 $i$ 个输入变量对输出 $Y$ 的影响程度, 见式 (33)

$$S_i = \frac{\text{Var}_i}{\text{Var}_{\text{total}}} \quad (33)$$

其中  $\text{Var}_i$  是第 $i$ 个输入变量变化导致的输出方差,  $\text{Var}_{\text{total}}$  是所有输入变量变化导致的总输出方差。

对于第 $i$ 个输入变量  $X_i$ ,  $S_i = \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2 \bullet \left( \frac{\text{Var}_i}{\text{Var}_{\text{total}}} \right)$ , 见式 (34)

$$Y = C = \sum_{i=1}^8 c_{\text{part}} x_i + \sum_{j=1}^3 c_{\text{inspect}} y_j + c_{\text{inspect}} z + \sum_{k=1}^4 c_{\text{disassembly}} u_k + \sum_{k=1}^4 c_{\text{replace}} (1 - z) u_k + \sum_{k=1}^4 c_{\text{disposal}} u_k \quad (34)$$

根据上述结果，代入决策变量  $x_i y_j z u_k$ ，计算  $S_i$ ：见式（35）

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^8 c_{\text{part}} \frac{\partial C}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^3 c_{\text{inspect}} \frac{\partial C}{\partial z} = c_{\text{inspect}} \frac{\partial C}{\partial u_k} = \sum_{k=1}^4 c_{\text{disassembly}} \quad (35)$$

Python运行：得到的最优决策为检测零件1、2、4、5、7，其他零部件不检测；检测半成品1、2、3；不拆解不合格半成品1、2、3；不检测成品，如果成品不合格，拆解不合格成品。在此最优决策下得到生产每个产品的最小成本为127.7元。各变量灵敏度影响变量指标图，见图1。

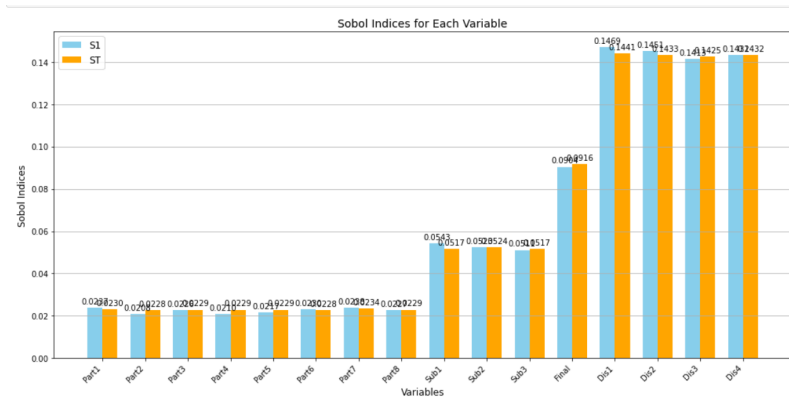


图1 各变量灵敏度影响变量

关键变量：不合格产品拆解（Dis1-Dis4）是影响总成本的关键变量，需要特别关注这些决策对成本的影响。

次要变量：零部件和半成品检测对总成本的影响较小，但仍需考虑，因为它们在生产过程中仍然扮演着重要角色。剔除Sobol指数较低的变量，减少问题的维度，从而降低计算成本。

## 2. 总结

本文通过建立 $\alpha+\beta$ 联合功效框架，将统计检验、动态期望和整数规划相结合，实现了电子产品生产过程中质量与成本的理论一体化。通过优化抽样检测策略、多阶段生产决策和高维生产流程组合，企业可以在保证产品质量的前提下，有效降低生产成本，提高生产效率和资源利用率。本文的研究成果不仅为企业提供了科学的决策支持工具，还对整个行业的发展具有重要的推动作用。

## 参考文献

- [1] NEYMAN J, PEARSON E. On the problem of the most efficient tests of statistical. London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 2017.2017
- [2] BRIMACOMBE M. Likelihood methods in biology and ecology: a modern approach to statistics: Chapman and Hall/CRC; 2018.
- [3] BELLMAN R. The theory of dynamic programming. Bulletin of the American Mathematical Society. 1954; 60(6): 503-15.1954
- [4] GUROBI OPTIMIZATION, LLC. (2010) "Gurobi Optimizer Reference Manual"
- [5] CHEN X, TIAN Y. Learning to perform local rewriting for combinatorial optimization. Advances in neural information processing systems. 2019; 32.2019
- [6] Introduction to Sensitivity Analysis. Global Sensitivity Analysis The Primer2007. p. 1-51.